

Adı Soyadı:
Numarası:

02.02.2023

2022-2023 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

- 1) a) $113x \equiv 7 \pmod{5612}$ kongruansının çözümü varsa bulunuz.
b) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ için $\text{ebob}(x+z, y) = \text{ebob}(x, y)$ olduğunu gösteriniz.
- 2) a) $x \equiv x_1 \pmod{m}$ ve $y \equiv y_1 \pmod{m}$ ise $xy \equiv x_1y_1 \pmod{m}$ olduğunu gösteriniz.
b) $G = \langle a \rangle$ n . mertebeden devirli bir grup olsun. a^s 'nin üreteç olması için gerek ve yeter şart $(s, n) = 1$ olmasıdır. Gösteriniz.
- 3) $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun, $N \triangleleft H$ ise $f^{-1}(N) \triangleleft G$ olduğunu gösteriniz.
- 4) \mathbb{Z}_{20}^* grubu ve $H = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_{20}^* : x \equiv 1 \pmod{5}\}$ alt kümesi veriliyor.
a) \mathbb{Z}_{20}^* grubu devirli midir?
b) $H < \mathbb{Z}_{20}^*$ olur mu?
- 5) a) \mathbb{Z}_8^* grubunun işlem tablosunu yapınız. \mathbb{Z}_8^* grubunun izomorf olduğu permütasyon grubunu bulunuz.
b) G ve H iki grup, $f: G \rightarrow H$ ve $g: H \rightarrow G$ iki fonksiyon olsun. f örten, f ve $g \circ f$ homomorfizma ise g de homomorfizmadır, gösteriniz.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

Çevre Anahitleri

1-a) $113x - 5612y = 7 \quad (113, 5612) = 1 \mid 7$

$$5612 = 49 \cdot 113 + 75$$

$$113 = 1 \cdot 75 + 38$$

$$75 = 1 \cdot 38 + 37$$

$$38 = 1 \cdot 37 + 1$$

$$1 = 38 - 1 \cdot 37$$

$$= 38 - 1 \cdot (75 - 1 \cdot 38)$$

$$= -1 \cdot 75 + 2 \cdot 38$$

$$= -1 \cdot 75 + 2 \cdot (113 - 1 \cdot 75)$$

den

$$1 = 149 \cdot 113 - 3 \cdot 5612$$

$$7 = 1043 \cdot 113 - 21 \cdot 5612$$

$x \equiv 1043 \pmod{5612}$ bulunur.

b) $(x+zy, y) = k \quad (x, y) = d$ olsun.

$$(x, y) = d \Rightarrow d \mid x \wedge d \mid y \Rightarrow d \mid x+zy \wedge d \mid y$$

$$\Rightarrow d \mid k \quad \textcircled{1}$$

$$(x+zy, y) = k \Rightarrow k \mid x+zy \wedge k \mid y$$

$$x+zy = kt, \quad x = -zy + kt \Rightarrow k \mid x \wedge k \mid y \Rightarrow k \mid d \quad \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den $k = d$ bulunur.

2- a) Defterinizde var

b) "

3- Defterinizde var.

4- a) $\mathbb{Z}_{20}^* = \{1, 3, 7, 9, 11, 17, 19\}$

$$o(3) = 4 \quad o(7) = 4 \quad o(13) = 4 \quad o(17) = 4 \quad o(19) = 2$$

olup $o(a) = |\mathbb{Z}_{20}^*|$ olan $a \in \mathbb{Z}_{20}^*$ olmadığı için devirli değildir.

b-) $H = \{\bar{1}, \bar{11}\}$

	$\bar{1}$	$\bar{11}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{11}$
$\bar{11}$	$\bar{11}$	$\bar{1}$

kapalı olup

$H \leq \mathbb{Z}_{20}^*$ dir.

$$5. a) \mathbb{Z}_8^* = \{ \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7} \}$$

\cdot	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

$$\forall m \in \mathbb{Z}_8^* \text{ için}$$

$$f_m(x) = mx \text{ olmak üzere}$$

$$f_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \end{pmatrix}$$

$$f_{\bar{3}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{7} & \bar{5} \end{pmatrix}$$

$$f_{\bar{5}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \\ \bar{5} & \bar{7} & \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix}$$

$$f_{\bar{7}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \\ \bar{7} & \bar{5} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$\text{olup } \{ f_{\bar{1}}, f_{\bar{3}}, f_{\bar{5}}, f_{\bar{7}} \}$$

b) $\forall h_1, h_2 \in H$ için f örten olduğundan
 $f(b_1) = h_1, f(b_2) = h_2, \exists b_1, b_2 \in G$ var

$$\forall h_1, h_2 \in H \text{ için } g(h_1 h_2) = g(f(b_1) f(b_2)) \\ = g(f(b_1 b_2)) \\ = (g \circ f)(b_1 b_2)$$

$g \circ f$ homomorfizma olduğundan

$$(g \circ f)(b_1 b_2) = (g \circ f)(b_1) (g \circ f)(b_2) \\ = g(f(b_1)) g(f(b_2)) \\ = g(h_1) g(h_2)$$